Linearna algebra

1. Zadane su matrice
   $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

   Izračunajte:

   (a) $A + B$,

   (b) $A^T + B^T$,

   (c) $2A - 3B$.

2. Izračunajte
$$\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 7 & -1 \\ 1 & -5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & -2 & 4 & 0 \end{bmatrix}.$$

3. Neka je $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$. Izračunajte $P(A)$, ako je $P(x) = 5x^3 + 2x^2 - 4x + 3$

4. Zadane su matrice
   $A = \begin{bmatrix} a & a \\ a-1 & a \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 6a & 1 \end{bmatrix}$.

   Odredite sve vrijednosti realnog parametra a za koje su matrice A i B komutativne?

5. Odredite sve matrice koje komutiraju s matricom
$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

6. Zadana je matrica
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

   Izračunajte n-tu potenciju matrice A.

7. Riješite sistem
$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & 3z & = & -2, \\ -4x & - & 3y & - & 2z & = & 3, \\ 3x & + & 4y & + & 5z & = & 0. \end{array}$$

8. Riješite sisteme:

   (a) $\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & 3z & = & 3, \\ -2x & & & + & z & = & -2, \\ x & + & 2y & - & z & = & 3, \\ -x & + & 2y & + & 12z & = & 1. \end{array}$

   (b) $\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 & + & 3x_2 & + & 11x_3 & + & 5x_4 & = & 2, \\ x_1 & + & x_2 & + & 5x_3 & + & 2x_4 & = & 1, \\ 2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & + & 2x_4 & = & -3, \\ x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & = & -3. \end{array}$

9. Riješite sljedeće sisteme:

(a) $$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 4, \\ 2x_1 & - & x_2 & - & 3x_3 & = & 2, \\ x_1 & - & 8x_2 & - & 9x_3 & = & -8, \\ 5x_1 & + & 5x_2 & & & = & 14. \end{array}$$

(b) $$\begin{array}{rcrcrcrcrl} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & - & 3x_4 & + & 4x_5 & = 2, \\ 3x_1 & + & x_2 & - & x_3 & - & x_4 & & & = 2, \\ 9x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & - & x_4 & - & 2x_5 & = 5, \\ x_1 & - & x_2 & & & - & x_4 & + & 2x_5 & = 1. \end{array}$$

10. Riješite sistem

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 0, \\ 2x_1 & + & x_2 & & & = & 0, \\ 3x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 0. \end{array}$$

11. Riješite sljedeće sisteme u zavisnosti od realnog parametra:

(a) $$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & - & z & = & 1, \\ 2x & + & 3y & + & az & = & 3, \\ x & + & ay & + & 3z & = & 2. \end{array}$$

(b) $$\begin{array}{rcrcrcr} \lambda x & + & y & + & z & = & 1, \\ x & + & \lambda y & + & z & = & \lambda, \\ x & + & y & + & \lambda z & = & \lambda^2. \end{array}$$

12. Odredite sve realne parametre p za koje sistem

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & = & 0, \\ x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & + & px_4 & = & 0, \\ -3x_1 & + & 2x_2 & - & 17x_3 & + & 8x_4 & = & 0, \\ 2x_1 & + & px_2 & + & 11x_3 & - & 5x_4 & = & 0. \end{array}$$

ima samo trivijalno rješenje.

13. Odredite rang sljedećih matrica:

(a) $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 16 & 1 \\ 1 & 6 & -2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$,

(b) $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 0 & 7 \\ -2 & -1 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & 5 \end{bmatrix}$.

14. U ovisnosti o parametru $\lambda \in \mathbb{R}$ odredite rang matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & \lambda^2 \\ 1 & \lambda^2 & \lambda \end{bmatrix}.$$

15. Sarrusovim pravilom izračunajte determinantu matrice

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & 1 & 8 \end{bmatrix}.$$

16. Laplaceovim razvojem izračunajte determinantu matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

17. Izračunajte determinante sljedećih matrica koristeći osobine determinanti:

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{bmatrix}$,

(b) $B = \begin{bmatrix} -2 & 5 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 7 & -2 \\ 3 & -1 & 0 & 5 & -5 \\ 2 & 6 & -4 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

18. Izračunajte determinantu matrice svođenjem na trougaoni oblik

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 4 & -1 \end{bmatrix}.$$

19. Izračunajte determinantu n-tog reda svođenjem na trokutasti oblik

$$D = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & -1 & 2 & \dots & 2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \dots & -1 \end{vmatrix}.$$

20. Odredite sve $x \in \mathbb{R}$ za koje je realna matrica

$$A = \begin{bmatrix} \ln(x-3) & -2 & 6 \\ x & -2 & 5 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

regularna.

21. Gauss-Jordanovom metodom odredite inverz matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

22. Cramerovim pravilom odredite inverz matrice

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 5 \\ 4 & 2 & 7 \end{bmatrix}.$$

23. Odredite inverz matrice

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$

ako je $ad - bc \neq 0$.

24. Cramerovim pravilom riješite sistem

$$\begin{array}{ccccccc} 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 2, \\ x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 3, \\ x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & -1. \end{array}$$

25. Riješite matričnu jednačinu $AX = B$, gdje je

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 6 \\ -1 & -6 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

26. Riješite matričnu jednačinu

$$(AX)^{-1} + X^{-1} = B,$$

gdje je $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$.

27. Riješite matričnu jednačinu

$$B(AX - I)^{-1}C = I$$

gdje je $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 10 & -2 & -9 \\ -5 & 2 & 5 \\ 4 & -1 & -4 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$.

28. Svaka kvadratna matrica A se može napisati kao zbroj simetrične i antisimetrične matrice. Pokažite da su te matrice dane sa

$A_1 = \frac{A + A^T}{2}$, $A_2 = \frac{A - A^T}{2}$.

Odredite A_1 i A_2 ako je

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 04 & 3 & 21 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

---

29. Za matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

izračunajte AB, BA, $A^2 + AB - 2B$.

30. Neka je $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$. Izračunajte $P(A)$, ako je $P(x) = x^4 - x^2 + 1$.

31. Izračunajte treću potenciju matrice n-tog reda

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

32. Riješite sljedeće sisteme:

(a) $$\begin{array}{rcrcrcrcl} 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & - & 4 & = & 0, \\ -x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & - & 8 & = & 0, \\ x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & - & 4 & = & 0. \end{array}$$

(b) $$\begin{array}{rcrcrcl} 2x & - & y & + & 3z & = & 0, \\ x & + & 2y & - & 5z & = & 0, \\ 3x & + & y & - & 2z & = & 0. \end{array}$$

(c) $$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 0, \\ 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & 0, \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & = & 0, \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 0. \end{array}$$

33. Riješite sljedeće sisteme:

(a) $$\begin{array}{rcrcrcrcl} 2x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 4, \\ 4x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & = & 6 \\ 8x_1 & + & 5x_2 & - & 3x_3 & + & 4x_4 & = & 12, \\ 3x_1 & + & 3x_2 & - & 2x_3 & + & 2x_4 & = & 6. \end{array}$$

(b) $$\begin{array}{rcrcrcrcrl} x_1 & + & 3x_2 & + & 5x_3 & - & 4x_4 & & & = 1, \\ x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & - & 2x_4 & + & x_5 & = -1, \\ x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & - & x_4 & - & x_5 & = 3, \\ x_1 & - & 4x_2 & + & x_3 & + & x_4 & - & x_5 & = 3, \\ x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & - & 4x_4 & + & x_5 & = -1. \end{array}$$

(c) $$\begin{array}{rcrcrcrcl} x & + & 2y & + & z & - & u & = & 2, \\ 2x & - & y & - & 2z & + & 3u & = & 5. \end{array}$$

(d) $$\begin{array}{rcrcrcrcrl} 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & - & x_4 & + & x_5 & = 1, \\ x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & - & 2x_5 & = 0, \\ 3x_1 & + & 3x_2 & - & 3x_3 & - & 3x_4 & + & 4x_5 & = 2, \\ 4x_1 & + & 5x_2 & - & 5x_3 & - & 5x_4 & + & 7x_5 & = 3. \end{array}$$

34. U ovisnosti o parametru $\lambda \in \mathbb{R}$ riješite sisteme:

(a) $$\begin{array}{rcrcrcl} 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & 1, \\ 3x_1 & + & 4x_2 & + & 2x_3 & = & 1, \\ x_1 & + & x_2 & + & \lambda x_3 & = & 2. \end{array}$$

(b) $$\begin{array}{rcrcrcl} \lambda x & + & 2y & + & z & = & 4, \\ 2x & + & y & + & 2z & = & 5, \\ 3x & + & 2y & + & 3z & = & 12. \end{array}$$

(c) $$\begin{array}{rcrcrcrcl} -2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & & & = & 1, \\ & & & & x_3 & + & 2x_4 & = & 5, \\ 2x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & = & 5 \\ \lambda x_1 & - & 2x_2 & + & 5x_3 & + & 6x_4 & = & 7. \end{array}$$

35. Odredite sve $a \in \mathbb{R}$ za koje sistem

$$\begin{array}{rcrcrcl} -x & + & y & + & z & = & ax, \\ x & - & y & + & z & = & ay, \\ x & + & y & - & z & = & az, \end{array}$$

ima jednoparametarsko rješenje.

36. Odredite rang sljedećih matrica:

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$,

(b) $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$,

(c) $C = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$,

(d) $D = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & 4 & 3 & 0 & 9 \end{bmatrix}$.

37. Izračunajte determinante sljedećih matrica:

(a) $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 6 \\ 2 & 8 & 3 \end{bmatrix}$,

(b) $B = \begin{bmatrix} 3 & -5 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 0 & -2 \\ -3 & 5 & 2 & 1 \\ -1 & -3 & 5 & 7 \end{bmatrix}$,

(c) $C = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 5 & 6 \\ 3 & -1 & -15 & -18 \\ 2 & 1 & 0 & 7 \\ 3 & 1 & 1 & 6 \end{bmatrix}$,

(d) $D = \begin{bmatrix} 0 & c & -b & x \\ -c & 0 & a & y \\ b & -a & 0 & z \\ -x & -y & -z & 0 \end{bmatrix}$.

38. Izračunajte determinante sljedećih matrica n-tog reda:

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & n-2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$,

(b) $B = \begin{bmatrix} 1 & n & n & \cdots & n \\ n & 2 & n & \cdots & n \\ n & n & 3 & \cdots & n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ n & n & n & \cdots & n \end{bmatrix}$.

39. Odredite sve $x \in \mathbb{R}$ za koje je matrica

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2-x^2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 9-x^2 \end{bmatrix}$$

singularna.

40. Gauss-Jordanovom metodom i Cramerovim pravilom izračunajte inverze matrica:

(a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$,

(b) $B = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{bmatrix}$,

(c) $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

41. Riješite sljedeće matrične jednačine:

(a) $3A - 2X = B$, ako je

$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$,

(b) $AXB = C$, ako je

$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$,

(c) $AX + 2B = C + BX$, ako je

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$,

(d) $A(A + B)BX = I$, ako je

$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$,

(e) $AX^{-1}B - C = AX^{-1}$, ako je

$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

42. Riješite sistem

$$\begin{array}{rcrcrcr} & - & x_2 & + & 3x_3 & = & 7 \\ -2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & -3 \\ 3x_1 & - & 2x_2 & & & = & 2 \end{array}$$

(a) Cramerovim pravilom,

(b) rješavanjem matrične jednačine,

(c) Gaussovom metodom eliminacije.

43. Izračunajte matrice X i Y reda 2 koje zadovoljavaju matrične jednačine

$$AX \;+\; Y \;=\; I, XB \;+\; A^{-1}Y \;=\; O,$$

ako je $A = \begin{bmatrix} 3 & -2-4 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & -1-1 & 1 \end{bmatrix}$, I jedinična matrica, a O nulmatrica.

Vektori

1. Zadani su vektori $\vec{p} = \lambda\vec{a} + 17\vec{b}$ i $\vec{q} = 3\vec{a} - \vec{b}$, gdje je $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 5, \angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{2\pi}{3}$.
   (a) Odredite koeficijent λ tako da vektori $\vec{p}$ i $\vec{q}$ budu međusobno okomiti.
   (b) Izračunajte duljinu vektora $\vec{r} = 4\vec{p} - 23\vec{q}$.

2. Zadane su tačke $A(2,3,2), B(0,1,1), C(4,4,0), D(8,6,6)$. Odredite vektorsku projekciju vektora $\overrightarrow{AB}$ na vektor $\overrightarrow{CD}$ i njenu duljinu.

3. Dani su vektori $\vec{a} = (0, 2\lambda, \lambda)$, $\vec{b} = (2,2,1)$ i $\vec{c} = (-1,-2,-1)$.
   (a) Odredite parametar λ takav da je $(\vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \lambda$.
   (b) Odredite vektor $\vec{d}$ koji zadovoljava uvjete $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c} \times \vec{d}$ i $\vec{a} \times \vec{c} = \vec{b} \times \vec{d}$.
   (c) Pokažite da su vektori $\vec{a} - \vec{d}$ i $\vec{b} - \vec{c}$ kolinearni.

4. Zadani su vektori $\vec{a}, \vec{b}$ i $\vec{c}$ takvi da $\vec{a}$ i $\vec{b}$ nisu kolinearni i vrijedi $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$. Izrazite vektor $\vec{a}$ preko vektora $\vec{c}$ i $\vec{d}$, ako je $\vec{d} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$.

5. Trokut ABC zadan je vektorima $\overrightarrow{AB} = 3\vec{p} - 4\vec{q}$ i $\overrightarrow{BC} = \vec{p} + 5\vec{q}$, pri čemu je $|\vec{p}| = |\vec{q}| = 2$, $\angle(\vec{p}, \vec{q}) = \dfrac{\pi}{3}$. Odredite površinu P i visinu v_C spuštenu iz vrha C.

6. Odredite površinu paralelograma s dijagonalama
   $\vec{e} = -\vec{i} - 2\vec{j} - 4\vec{k} \quad$ i $\quad \vec{f} = 5\vec{i} - 4\vec{j} - 8\vec{k}$.

7. Zadani su vektori $\vec{a} = (1, 2\alpha, 1), \vec{b} = (2, \alpha, \alpha)$ i $\vec{c} = (3\alpha, 2, -\alpha)$.
   (a) Izračunajte mješoviti produkt vektora $\vec{a}, \vec{b}$ i $\vec{c}$.
   (b) Odredite $\alpha \in \mathbb{R}$ takav da su vektori $\vec{a}, \vec{b}$ i $\vec{c}$ komplanarni.

8. Izračunajte volumen paralelopipeda razapetog vektorima
   $\vec{a} = \vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}, \qquad \vec{b} = 2\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}, \quad \vec{c} = \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$.

9. Izračunajte visinu paralelopipeda razapetog vektorima
   $\vec{a} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - 5\vec{k}, \quad \vec{b} = \vec{i} - \vec{j} + 4\vec{k}, \quad \vec{c} = \vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$, ako je osnovica paralelogram razapet vektorima $\vec{a}$ i $\vec{b}$.

10. Odredite α tako da volumen tetraedra razapetog vektorima $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\alpha\vec{c}$ iznosi $2/3$, gdje je
    $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}, \qquad \vec{b} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}, \qquad \vec{c} = \vec{i} - \dfrac{1}{3}\vec{k}$.

---

11. Odredite duljinu vektora $\vec{a} = \vec{p} - 2\vec{q}$ ako je $|\vec{p}| = 2, |\vec{q}| = 3, \angle(\vec{p}, \vec{q}) = \dfrac{\pi}{6}$.

12. Zadani su vektori $\vec{a} = \{2\lambda, 1, 1-\lambda\}, \vec{b} = \{-1, 3, 0\}, \vec{c} = \{5, -1, 8\}$. Nađite parametar λ za koji vrijedi $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \angle(\vec{a}, \vec{c})$.

13. Zadani su vektori $\vec{a} = \{1, -2, 1\}, \vec{b} = \{-1, 1, 2\}$ i $\vec{c} = \{1, y, z\}$. Ako je $\vec{c} \perp \vec{a}$ i $\vec{c} \perp \vec{b}$, izračunajte y i z.

14. Odredite parametar λ takav da vektori $\vec{a} = \{2, -3, 0\}$ i $\vec{b} = \{\lambda, 4, 0\}$ budu okomiti.

15. Odredite kut α između vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ ako je $(\vec{a} + \vec{b}) \perp (7\vec{a} - 5\vec{b})$ i $(\vec{a} - 4\vec{b}) \perp (7\vec{a} - 2\vec{b})$.

16. Zadani su vektori $\vec{p}$ i $\vec{q}$ takvi da je $|\vec{p}| = 2, |\vec{q}| = 3, \angle(\vec{p}, \vec{q}) = \frac{\pi}{3}$.
    (a) Izrazite vektor $\vec{n}$ preko vektora $\vec{p}$ i $\vec{q}$ ako vrijedi $\vec{n} \cdot \vec{p} = 7$ i $\vec{n} \cdot \vec{q} = 3$.
    (b) Izrazite jedinični vektor vektora $\vec{n}$ preko $\vec{p}$ i $\vec{q}$.

17. Odredite vektor $\vec{b}$ koji je kolinearan s vektorom $\vec{a} = \{2, -1, 2\}$ i zadovoljava uvjet $\vec{a} \cdot \vec{b} = -18$.

18. Odredite površinu P trokuta što ga određuju vektori $\vec{a} = \{2, 3, 5\}$ i $\vec{b} = \{1, 2, 1\}$.

19. Odredite površinu P trokuta s vrhovima $A = (1, 1, 1), B = (2, 3, 4)$ i $C = (4, 3, 2)$.

20. Odredite duljinu visine v_A spuštene iz vrha A u trokutu ABC ako su vrhovi trokuta $A = (1, 0, -1), B = (-1, 1, 1)$ i $C = (0, 2, 1)$.

21. Odredite površinu P i visinu v_B spuštenu iz vrha B u trokutu ABC sa vrhovima $A = (1, -2, 8), B = (0, 0, 4)$ i $C = (6, 2, 0)$.

22. Zadani su vrhovi $A = (1, -2, 3), B = (3, 2, 1)$ i $C = (6, 4, 4)$ paralelograma $ABCD$. Odredite površinu P paralelograma $ABCD$ i koordinate vrha D.

23. Odredite površinu P paralelograma s dijagonalama $\vec{e} = 2\vec{m} - \vec{n}$ i $\vec{f} = 4\vec{m} - 5\vec{n}$, ako je $|\vec{m}| = |\vec{n}| = 1$ i $\angle(\vec{m}, \vec{n}) = \frac{\pi}{4}$.

24. Zadani su vektori $\vec{m} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$, $\vec{n} = -2\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$, gdje su $\vec{a}, \vec{b}$ i $\vec{c}$ jedinični vektori koji zatvaraju kutove $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{3}$, $\angle(\vec{b}, \vec{c}) = \frac{2\pi}{3}$ i $\angle(\vec{a}, \vec{c}) = \frac{\pi}{3}$. Izračunajte duljine dijagonala d_1 i d_2 paralelograma konstruiranog nad tim vektorima.

25. Odredite volumen V paralelopipeda razapetog vektorima $\vec{a} = \{1, 0, 3\}, \vec{b} = \{-1, 1, 0\}$ i $\vec{c} = \{2, 1, 1\}$.

26. Zadane su tačke $A = (1, 2, 1), B = (3, -2, 1), C = (1, 4, 3)$ i $D = (5, 0, 5)$. Izračunajte volumen V paralelopipeda razapetog vektorima $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ i $\overrightarrow{AD}$.

27. Pokažite da ako za tri proizvoljna vektora $\vec{a}, \vec{b}$ i $\vec{c}$ vrijedi $\vec{a} \times \vec{b} + \vec{b} \times \vec{c} + \vec{c} \times \vec{a} = \vec{0}$, onda su vektori $\vec{a}, \vec{b}$ i $\vec{c}$ komplanarni, a vektori $\vec{d} = \vec{a} - \vec{c}$ i $\vec{e} = \vec{b} - \vec{a}$ kolinearni.

28. Odredite parametar t takav da vektori $\vec{a} = \{3, 2, t\}, \vec{b} = \{-1, 0, 0\}$ i $\vec{c} = \{4, 1, 0\}$ ne čine bazu vektorskog prostora.

29. Odredite jedinični vektor okomit na vektore $\vec{a} = \{-2, -6, -1\}$ i $\vec{b} = \{1, 2, 0\}$ koji s vektorom $\vec{c} = \{-2, 1, 0\}$ zatvara šiljasti kut. U smjeru tog jediničnog vektora odredite $\vec{d}$ takav da vektori $\vec{a}, \vec{b}$ i $\vec{d}$ budu stranice paralelopipeda čiji volumen iznosi 18.

Jednačina ravni i prave

1. Odredite jednačinu ravni koja prolazi tačkom $T_0 = (2, -1, 3)$ i

   (a) na koordinatnim osima odsijeca iste odsječke $a \neq 0$.

   (b) sadrži x-os.

   (c) sadrži ishodište i tačku $T = (1, 1, 1)$.

2. Kroz presjek ravni $4x - y + 3z - 1 = 0$ i $x + 5y - z + 2 = 0$ postavi ravan tako da

   (a) prolazi tačkom $M = (1, 0, 2)$.

   (b) je paralelna s xy-ravninom.

   (c) je okomita na ravan $2x - y + 5z - 3 = 0$.

3. Odredite jednačinu ravni π_0 koja prolazi tačkom $M = (2, -1, 1)$ i okomita je na ravni
   $\pi_1: \; 3x + 2y - z - 4 = 0,$
   $\pi_2: \; x + y + z - 3 = 0.$

4. Odredite jednačinu ravni π koja prolazi tačkama $A = (1, 2, 3)$, $B = (3, 2, 1)$ i okomita je na ravan $\pi_1 : 4x - y + 2z - 7 = 0$.

5. Odredite kanonsku i parametarsku jednačinu pravca koji

   (a) prolazi tačkama $M = (1, 2, -1)$ i $N = (2, 0, 3)$.

   (b) je zadan kao presjek ravni $\pi_1 : x - y + z - 4 = 0$ i $\pi_2 : 2x + y - 2z + 5 = 0$.

6. Zadane su tačke $A = (1, 2, 2)$, $B = (3, 1, 2)$, $C = (-1, 5, 2)$, $D = (2, -1, 0)$. Odredite jednačinu pravca p koji prolazi tačkom $T = (1, 2, 3)$ i okomit je na pravce određene vektorima $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{CD}$.

7. Odredite jednačinu ravni π koja prolazi tačkama $A = (1, 0, -1)$ i $B = (-1, 2, 1)$, a paralelna je s pravcem p koji je presjek ravni $\pi_1 : 3x + y - 2z - 6 = 0$, $\pi_2 : 4x - y + 3z = 0$.

8. Zadan je pravac p kao presjek ravni

   $\pi_1 : x - 2z - 3 = 0$, $\pi_2 : y - 2z = 0$.

   Odredite sjecište pravca p i ravni $\pi : x + 3y - z + 4 = 0$.

9. Odredite sjecište pravaca

   $(p_1) : \dfrac{x-1}{4} = \dfrac{y-2}{3} = \dfrac{z}{1}$ i $(p_2) : \dfrac{x}{3} = \dfrac{y+1}{3} = \dfrac{z-2}{0}$.

10. Odredite tačku N simetričnu tački $M = (1, 0, 2)$ s obzirom na pravac

    $(p) : \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y}{5} = \dfrac{z+1}{1}$.

11. Odredite ortogonalnu projekciju N tačke $M(-1, 0, 1)$ na ravan $\pi : 2x + y - z = 7$.

12. Odredite parametarsku jednačinu ortogonalne projekcije q pravca

    $(p) : \dfrac{x}{-2} = \dfrac{y - \frac{12}{7}}{1} = \dfrac{z - \frac{10}{7}}{3}$ na ravan $\pi : 2x - y + 5z - 5 = 0$.

13. Odredite jednačinu skupa tačaka koje su jednako udaljene od tačaka $A(2, -1, 2)$ i $B(0, 1, 0)$.

14. Nađite udaljenost između ravni

    $\pi_1 : 2x + 3y - 6z + 14 = 0 \quad$ i $\quad \pi_2 : 2x + 3y - 6z - 35 = 0.$

15. Nađite ravan π koja je paralelna pravcima

    $$(p_1) : \begin{cases} y = 2x - 1 \\ z = 3x + 2 \end{cases} \quad i \quad (p_2) : \begin{cases} y = -x + 2 \\ z = 4x - 1 \end{cases}$$

    i jednako udaljena od tih pravaca.

16. Odredite udaljenost tačke $T = (2, 1, 3)$ od pravca
    $(p) : \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z-1}{3}.$

17. Odredite udaljenost između paralelnih pravaca
    $(p_1) : \dfrac{x}{1} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z}{2} \quad$ i $\quad (p_2) : \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z-1}{2}.$

18. Zadani su pravci p_1, koji prolazi kroz tačke $A = (1, 0, -1)$ i $B = (-1, 1, 0)$, i p_2, koji prolazi kroz tačke $C = (3, 1, -1)$ i $D = (4, 5, -2)$. Dokažite da su ti pravci mimosmjerni i odredite najmanju udaljenost između njih.

19. Zadan je trokut s vrhovima $A(2, 3, 2)$, $B(0, 1, 1)$ i $C(4, 4, 0)$. Odredite sjecište S simetrale unutarnjeg kuta pri vrhu A i simetrale stranice AB.

---

20. Odredite jednačine koordinatnih ravni, te ravni paralelnih s njima.

21. Odredite jednačinu ravni π koja sadrži tačku $T = (1, -3, 2)$ i paralelna je s ravninom $\pi_1 : 7x - 4y + z - 4 = 0$.

22. Odredite jednačinu ravni π koja prolazi tačkom $M = (-2, 1, -5)$ i okomita je na ravni

    $$\pi_1 : -3x + 2y + z + 5 = 0 \quad \text{i} \quad \pi_2 : 6x - 5y + 4z + 2 = 0.$$

23. Odredite jednačinu ravni π koja prolazi tačkama $A = (1, 2, 3)$, $B = (3, 2, 1)$ i okomita je na ravan $\pi_1 : 4x - y + 2z - 7 = 0$.

24. Odredite opći, segmentni i normalni oblik jednačine ravni π kroz tačke $A = (2, -6, 4)$, $B = (10, 2, -8)$ i $C = (0, 4, 6)$.

25. Odredite kanonske i parametarske jednačine koordinatnih osi.

26. Vrhovi trokuta su $A = (1, 1, 1), B = (3, 0, 3)$ i $C = (-2, 1, 1)$. Odredite jednačinu simetrale s kuta BAC.

27. Odredite jednačinu ravni π koja sadrži tačku $P = (1, -1, 2)$ i pravac koji je zadan kao presjek ravni $3x + y - z + 5 = 0$ i $x - y + 2z - 1 = 0$.

28. Odredite jednačinu ravni π koja prolazi tačkama $A = (1, 0, -1)$ i $B = (-1, 2, 1)$, a paralelna je s pravcem koji je presjek ravni $3x + y - 2z - 6 = 0$ i $4x - y + 3z = 0$.

29. Odredite jednačinu ravni π koja sadrži prave $(p_1) : \dfrac{x}{2} = \dfrac{y-2}{3} = \dfrac{z+2}{-1} \quad$ i $\quad (p_2) : \dfrac{x-2}{-2} = \dfrac{y+1}{3} = \dfrac{z}{-1}.$

30. Odredite sjecište S pravca $(p): \dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y}{-2} = \dfrac{z+1}{-1}$ i ravni $\pi: 2x - 3y + z + 4 = 0$.

31. Ispitajte međusobni položaj pravca $(p): \dfrac{x}{-2} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z-2}{1}$ i ravni $\pi: x + y + 3z - 7 = 0$.

32. Da li se pravci $(p_1): \dfrac{x}{1} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z-1}{1}$ i $(p_2): \dfrac{x}{2} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z}{2}$ sijeku?

33. Odredite jednačinu pravca p koji prolazi tačkom $A = (2, -3, 1)$, siječe pravac $(q): \dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y+3}{-1} = \dfrac{z-5}{3}$ i okomit je na njega.

34. Odredite jednačinu pravca p koji leži u ravnini $\pi: x - 4y + 2z - 7 = 0$, prolazi tačkom T u kojoj pravac p_1 zadan jednačinama $x - 2y - 4z + 3 = 0$ i $2x + y - 3z + 1 = 0$ probada ravan π i okomit je na pravac p_1.

35. Odredite tačku N simetričnu tački $M = (3, -1, 1)$ s obzirom na ravan koja prolazi tačkama $T_1 = (-2, -1, -1), T_2 = (2, 1, -5)$ i $T_3 = (-4, -1, 0)$.

36. Odredite kanonsku jednačinu ortogonalne projekcije pravca $(p): \dfrac{x-7}{-8} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z+1}{3}$ na ravan $\pi: x - y + 3z + 7 = 0$.

37. Odredite kanonsku jednačinu ortogonalne projekcije pravca $(p): \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+1}{3} = \dfrac{z-3}{-1}$ na ravan $\pi: x + 2y - 5z + 3 = 0$.

38. Zadani su paralelni pravci

$$(p): \frac{x}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-3}{0} \quad \text{i} \quad (q): \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-3}{0}.$$

Odredite ravan π s obzirom na koju su ti pravci zrcalno simetrični.

39. Odredite sve tačke na pravcu p zadanog kao presjek ravni $x + y - 3z + 6 = 0$ i $x - y - z = 0$ koje su udaljene od tačke $T = (1, 0, 1)$ za $\sqrt{8}$.

40. Odredite jednačinu ravni π koja prolazi pravcem

$$(p_1): \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{1}$$

i paralelna je pravcu

$$(p_2): \frac{x+3}{3} = \frac{y-1}{4} = \frac{z+2}{2}.$$

Izračunajte udaljenost pravca p_2 od ravni π.

41. Izračunajte udaljenost tačke $M = (2, -1, 3)$ od pravca $(p): \dfrac{x+1}{3} = \dfrac{y+2}{4} = \dfrac{z-1}{2}$.

42. Odredite najmanju udaljenost između pravaca $(p_1): \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y}{-1} = \dfrac{z-1}{3}$ i $(p_2): \dfrac{x}{-1} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z-2}{2}$.

43. Odredite najmanju udaljenost između pravaca $(p_1): \dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z-1}{2}$ i $(p_2): \dfrac{x}{1} = \dfrac{y+1}{3} = \dfrac{z-2}{4}$.

44. Na pravcu $(p) : \dfrac{x+4}{1} = \dfrac{y+2}{-1} = \dfrac{z-10}{-1}$ odredite tačku A koja je najbliža pravcu (q) : $\dfrac{x-3}{1} = \dfrac{y-3}{-4} = \dfrac{z+3}{2}$.